

Материалы для обеспечения учебной самостоятельной работы (УСР) студентов

Тема 1. Методы решения нелинейных уравнений и их систем

Лекция 3. Решение систем нелинейных уравнений – 2 часа

1. Постановка задачи. Метод Ньютона. Общие замечания о сходимости процесса Ньютона. Модифицированный метод Ньютона.

2. Метод итераций. Условия сходимости метода итераций (первое и второе достаточные условия сходимости процесса итерации). Способы подготовки системы алгебраических уравнений к методу итераций. Примеры.

Цели: 1) ознакомиться с методами Ньютона, итераций, их сходимостью при решении систем нелинейных уравнений; 2) научиться применять методы Ньютона, простой итерации для решения систем нелинейных уравнений.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, защита лабораторных работ, контрольная работа.

Учебно-методическое обеспечение – [4]–[8] [10] [12] [13] [15]–[18] [21] [22] из списка литературы.

Пусть дана система нелинейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

или $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, n$,

или, более коротко, в векторной форме

$$f(x) = 0, \quad (1.22)$$

где x – вектор неизвестных величин, f – вектор-функция

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассматривается задача: с заданной точностью решить систему уравнений (1.21) (или (1.22)). Требуется найти такой вектор x , который при подстановке в систему вида (1.21) превращает каждое уравнение в верное числовое равенство.

Особенностью этой задачи является ее сложность. Дело в том, что в общем случае неизвестно количество решений системы (1.21), в том числе и имеет ли система хотя бы одно решение. Если же решение существует, то корни могут быть найдены только приближенно, поскольку для системы (1.21) в принципе не существует прямых методов нахождения решений. В редких случаях для решения такой системы удастся применить метод последовательного исключения неизвестных и свести решение исходной задачи к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Значения других неизвестных величин находятся соответствующей подстановкой в конкретные выражения.

Однако в подавляющем большинстве случаев для решения систем нелинейных уравнений используются итерационные методы.

В дальнейшем предполагается, что ищется изолированное решение нелинейной системы. Как и в случае одного нелинейного уравнения, локализация решения может осуществляться на основе специфической информации по конкретной решаемой задаче (например, по физическим соображениям), и с помощью методов математического анализа. При решении системы двух уравнений, достаточно часто удобным является графический способ, когда месторасположение корней определяется как точки пересечения кривых $f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 0$ на плоскости (x_1, x_2) .

Метод простой итерации для систем нелинейных уравнений n -го порядка. Аналогично методу простой итерации для нелинейных уравнений, построим рассуждения относительно решения систем нелинейных уравнений этим методом.

Пусть необходимо решить систему нелинейных уравнений вида (1.21). Приведем эту систему предварительно к виду

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.23)$$

или $x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$

или, в векторной форме, $x = \Phi(x)$.

Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ – начальное приближение. Последующие приближения в методе простой итерации находятся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \end{cases} \quad (1.24)$$

или $x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, $i = 1, \dots, n$,

или, в векторной форме, $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$

Если последовательность векторов $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ сходится к вектору $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, а функции $\varphi_i(x)$ непрерывны, то вектор x^* является решением системы (1.22).

Допустим, что в некоторой выпуклой области G функции $\varphi_i(x)$ имеют непрерывные первые производные $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}$, $M_{i,j} = \max_G \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right|$ и в G система (9.21) имеет единственное решение $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Будем считать, что при некотором начальном приближении $x^{(0)}$ все последующие приближения $x^{(k)}$ не выходят из области G .

Теорема 1.4. Для сходимости метода итераций достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $M = [M_{i,j}]$ были по модулю меньше 1, а начальное приближение $x^{(0)}$ было достаточно близко к решению α .

Условие теоремы будет выполнено, если какая-нибудь из норм матрицы M меньше единицы. Следовательно, для сходимости метода итерации достаточно выполнения одного из условий

$$\sum_{j=1}^n M_{i,j} < 1, i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n M_{i,j} < 1, j = \overline{1, n}, \quad \sum_{i,j=1}^n M_{i,j} < 1.$$

Метод простой итерации для систем нелинейных уравнений второго порядка. Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

действительные корни которых требуется найти с заданной степенью точности.

Предположим, что система (1.25) допускает лишь изолированные корни. Число этих корней и их приближенные значения можно установить, построив кривые $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, и определив координаты их точек пересечения.

Для применения метода итераций система (1.25) приводится к виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases}. \quad (1.26)$$

Функции $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ называются *итерирующими*.

Алгоритм решения задается формулами

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

где x_0, y_0 – некоторое начальное приближение.

Имеет место следующая

Теорема 1.5. Пусть в некоторой замкнутой окрестности $R (a \leq x \leq A, b \leq y \leq B)$ имеется одно и только одно решение $x = \xi, y = \eta$ системы (1.26). Если

1) функции $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в R ,

2) начальные приближения x_0, y_0 и все последующие приближения $x_n, y_n, n = 1, 2, \dots$ принадлежат R ,

3) в R выполнены неравенства

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| &\leq q_1 < 1 \\ \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| &\leq q_2 < 1 \end{aligned} \right\}, \quad (1.28)$$

то процесс последовательных приближений (1.27) сходится к решению $x = \xi, y = \eta$ системы, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Эта теорема остается верной, если условие (1.28) заменить условием

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| &\leq q_1 < 1 \\ \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| &\leq q_2 < 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

– **условие сходимости итерационного процесса.**

Оценка погрешности n -го приближения дается неравенством

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \leq \frac{M}{1-M} (|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|),$$

где M – наибольшее из чисел q_1, q_2 , входящих в неравенства (1.28) или в неравенства (1.29). Сходимость метода итераций считается хорошей, если $M < \frac{1}{2}$, при этом $\frac{M}{1-M} < 1$, так что если в двух последовательных приближениях совпадают, скажем, первые три десятичных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений n -го порядка. Метод Ньютона применяется к решению систем уравнений вида (1.21)

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

или, в векторной форме, (1.22) $f(x) = 0$.

Введем матрицу Якоби $J(x)$ для функций $f_i(x) = 0, i = 1, \dots, n$, которые будем предполагать непрерывно дифференцируемыми

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Пусть задано начальное приближение $x^{(0)}$. Вместо нелинейного уравнения (1.22) решаем линейное уравнение

$$f(x^{(0)}) + J(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0. \quad (1.31)$$

Если $\det J(x^{(0)}) \neq 0$, то уравнение (1.31) имеет единственное решение, которое обозначим $x^{(1)}$. Вначале удобно решить уравнение (1.31) относительно $\Delta x^{(0)} = x - x^{(0)}$, а затем вычислить $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$. Если найдено $x^{(k)}$, то $x^{(k+1)}$ вычисляем по формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$, а поправку $\Delta x^{(k)} = (\Delta x_1^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)})$ находим из системы

$$f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})\Delta x^{(m)} = 0, \quad (1.31^*)$$

где $J(x^{(k)})$ – матрица неособенная, т.е. $\det J(x^{(k)}) \neq 0$, то поправка выражается следующим образом $\Delta x^{(m)} = -f(x^{(k)}) \cdot J^{-1}(x^{(k)})$, где $J^{-1}(x^{(k)})$ – матрица, обратная матрице Якоби.

Т.о., последовательные приближения находятся по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \cdot J^{-1}(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

т.е. для вычисления последовательных приближений на каждом шаге необходимо вычислять обратную матрицу, в которой вместо $x^{(k)}$ берется предыдущее приближение.

Если искать решение в координатной форме (система (1.31*) примет вид)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} &= -f_1(x^{(k)}) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} &= -f_n(x^{(k)}) \end{aligned} \right\}, \quad (1.32)$$

то на каждом шаге для отыскания поправок $\Delta x^{(k)} = (\Delta x_1^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)})$ к найденному приближению $x^{(k)}$ приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Решив (1.32) любым известным методом (например, методом Гаусса) находим новое приближение $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Если нулевое приближение выбрано удачно, то метод Ньютона сходится, причем очень быстро (обычно за 3-5 итераций). Поэтому на практике этот метод используют чаще всего.

Критерием окончания итераций является условие $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$.

Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений второго порядка. Пусть дана система

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (1.33)$$

Согласно методу Ньютона, последовательные приближения вычисляются по формулам

$$x_{n+1} = x_n - \frac{A_n}{J_n}, \quad y_{n+1} = y_n - \frac{B_n}{J_n},$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \\ B_n &= \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \\ J_n &= \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Метод Ньютона сходится, если начальное приближение выбрано удачно (при достаточной близости к решению системы) и матрица $J(x^*)$ невырожденная. На практике итерации обычно оканчивают, если $\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leq \varepsilon$. Для выбора начального приближения применяют, чаще всего, графический метод.

Тема 2. Интерполирование и приближение функций

Лекция 8. Приближение функций интерполяционными многочленами. Интерполирование функций многих переменных – 2 часа

1. Интерполирование функций многих независимых переменных.
2. Трудности задачи интерполирования функций многих переменных.
3. Обобщение интерполяционных формул Ньютона на случай функции многих переменных.

Цели: 1) изучить проблемы интерполирования функций многих переменных; 2) ознакомиться с интерполяционной формулой Ньютона для случая функции многих переменных; 3) научиться применять формулу Ньютона при интерполировании функций многих переменных.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, тестовые задания.

Учебно-методическое обеспечение – [3] [5]–[8] [10]–[12] [15]–[20] из списка литературы.

Интерполирование функций многих переменных значительно сложнее, чем для одной переменной. Это вызвано не только тем, что рассуждения становятся более громоздкими в силу наличия большого числа переменных, но и рядом принципиальных трудностей. Ограничимся случаем двух переменных (в том числе и потому, что двумерный случай наиболее широко распространен в практике), хотя принципиальных трудностей при обобщении на большее число измерений не существует.

Пусть на плоскости (x, y) даны $n+1$ точка $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Будем искать многочлен $P(x, y)$ относительно (x, y) возможно низшей степени, который в этих точках принимал соответственно значения z_0, z_1, \dots, z_n . Если искомый многочлен записать в виде

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \\ \dots + a_{m0}x^m + a_{m-1,1}x^{m-1}y + \dots + a_{0m}y^m,$$

то, подставляя данные координаты точек и приравнивая левую часть соответствующему значению z_i , получим систему $n+1$ линейных независимых алгебраических уравнений относительно $1 + 2 + 3 + \dots + m + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ неизвестных a_{ij} . Если не накладывать на $P(x, y)$ никаких дополнительных условий, то $n+1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$. То есть мы не можем решать задачу при любом количестве узлов интерполирования – это *во-первых*.

Рассмотрим определитель получившейся системы. Например, при $n=2$ и $m=5$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} (n=2), \quad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0 y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 \end{vmatrix} (n=5).$$

Первый определитель обращается в нуль, если все три точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ лежат на одной прямой; второй равен нулю, если все шесть точек лежат на одной кривой второго порядка. Аналогично, если взять 10 узлов, то определитель системы обратится в нуль, если все они лежат на одной кривой третьего порядка. То есть, узлы интерполирования не могут быть расположены произвольно – это *во-вторых*, а проверка того, что определители не равны нулю довольно затруднительна.

Третье принципиальное затруднение возникает при оценке остаточных членов, так как теорема Ролля в этом случае неприменима. Отметим так же и то, что более громоздкими становятся рассуждения, связанные с большим числом переменных.

Интерполяционная формула Ньютона. Приведем интерполяционную формулу Ньютона для случая двух переменных. Возьмем $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ узлов, расположенных следующим образом

$$\begin{array}{cccccc} (x_0, y_0) & (x_1, y_0) & \dots & (x_{n-1}, y_0) & (x_n, y_0) \\ (x_0, y_1) & (x_1, y_1) & \dots & (x_{n-1}, y_1) & \\ \dots & \dots & & & \\ (x_0, y_{n-1}) & (x_1, y_{n-1}) & & & \\ (x_0, y_n) & & & & \end{array}$$

Причем, $x_i \neq x_j, y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Значения x_i и y_i могут быть произвольными, так, что взаимное расположение узлов может быть довольно общим. Обобщение интерполяционной формулы Ньютона (2.29) для неравных промежутков на случай интерполирования функций двух переменных имеет вид

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} (x-x_0) \dots (x-x_{i-1}) \cdot (y-y_0) \dots (y-y_{j-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_i; y_0, y_1, \dots, y_j). \quad (2.54)$$

В том случае, когда $x_i - x_{i-1} = \text{const}$ и $y_j - y_{j-1} = \text{const}$ формулу (2.54) можно упростить. Пусть $x_i - x_{i-1} = h, y_j - y_{j-1} = k$. По аналогии с обычными конечными разностями введем двойные конечные разности

$$\begin{aligned}
f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j) &= \Delta_x f(x_i, y_j), \\
f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j) &= \Delta_y f(x_i, y_j), \\
\Delta_x f(x_{i+1}, y_j) - \Delta_x f(x_i, y_j) &= \Delta_{x^2}^2 f(x_i, y_j), \\
\Delta_x f(x_i, y_{j+1}) - \Delta_x f(x_i, y_j) &= \Delta_{xy}^2 f(x_i, y_j), \\
\Delta_y f(x_i, y_{j+1}) - \Delta_y f(x_i, y_j) &= \Delta_{y^2}^2 f(x_i, y_j), \\
\Delta_{x^2}^2 f(x_{i+1}, y_j) - \Delta_{x^2}^2 f(x_i, y_j) &= \Delta_{x^3}^3 f(x_i, y_j), \\
\Delta_{x^2}^2 f(x_i, y_{j+1}) - \Delta_{x^2}^2 f(x_i, y_j) &= \Delta_{x^2 y}^3 f(x_i, y_j), \\
\Delta_{xy}^2 f(x_i, y_{j+1}) - \Delta_{xy}^2 f(x_i, y_j) &= \Delta_{xy^2}^3 f(x_i, y_j), \\
\Delta_{y^2}^2 f(x_i, y_{j+1}) - \Delta_{y^2}^2 f(x_i, y_j) &= \Delta_{y^3}^3 f(x_i, y_j),
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Учитывая (2.55) можно заменить разделенные разности конечными по формулам

$$\begin{aligned}
f(x_0, x_1, y_0) &= \frac{1}{h} \Delta_x f(x_0, y_0), \quad f(x_0, y_0, y_1) = \frac{1}{k} \Delta_y f(x_0, y_0), \\
f(x_0, x_1, x_2, y_0) &= \frac{1}{2!h^2} \Delta_{x^2}^2 f(x_0, y_0), \quad f(x_0, x_1, y_0, y_1) = \frac{1}{hk} \Delta_{xy}^2 f(x_0, y_0), \quad f(x_0, y_0, y_1, y_2) = \frac{1}{2!k^2} \Delta_{y^2}^2 f(x_0, y_0), \\
f(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0) &= \frac{1}{3!h^3} \Delta_{x^3}^3 f(x_0, y_0), \quad f(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1) = \frac{1}{2!h^2 k} \Delta_{x^2 y}^3 f(x_0, y_0), \\
f(x_0, x_1, y_0, y_1, y_2) &= \frac{1}{2!hk^2} \Delta_{xy^2}^3 f(x_0, y_0), \quad f(x_0, y_0, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{3!k^3} \Delta_{y^3}^3 f(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

Таким образом, формула (2.54) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{x-x_0}{h} \Delta_x f(x_0, y_0) + \frac{y-y_0}{k} \Delta_y f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2} \Delta_{x^2}^2 f(x_0, y_0) + \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{hk} \Delta_{xy}^2 f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{2!k^2} \Delta_{y^2}^2 f(x_0, y_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!h^3} \Delta_{x^3}^3 f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_0)}{2!h^2 k} \Delta_{x^2 y}^3 f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(x-x_0)(y-y_0)(y-y_1)}{2!hk^2} \Delta_{xy^2}^3 f(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{3!k^3} \Delta_{y^3}^3 f(x_0, y_0) + \dots,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

или если обозначить $t = \frac{x-x_0}{h}$, $u = \frac{y-y_0}{k}$, то

$$\begin{aligned}
P(x_0 + ht, y_0 + ku) = & f(x_0, y_0) + t\Delta_x f(x_0, y_0) + u\Delta_y f(x_0, y_0) + \\
& + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta_{x^2}^2 f(x_0, y_0) + tu\Delta_{xy}^2 f(x_0, y_0) + \\
& + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta_{y^2}^2 f(x_0, y_0) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta_{x^3}^3 f(x_0, y_0) + \\
& + \frac{t(t-1)u}{2!} \Delta_{x^2y}^3 f(x_0, y_0) + \frac{tu(u-1)}{2!} \Delta_{xy^2}^3 f(x_0, y_0) + \\
& + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \Delta_{y^3}^3 f(x_0, y_0) + \dots
\end{aligned} \tag{2.57}$$

(2.57) – обобщение формулы Ньютона для интерполирования вперед функций двух переменных.

Возможны и другие подходы к интерполированию функций многих переменных при помощи многочленов, см., например, Березин, И. С. Методы вычислений: в 2 т. Т.1. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Наука, 1966. – 630 с.

Тема 2. Интерполирование и приближение функций

Лекция 12. Равномерные приближения (3ч. – 2ч. УСП+1ч. ЛР)

1. Постановка задачи, основные понятия, определения и теоремы. Понятие о наилучшем равномерном приближении непрерывных функций обобщенными многочленами.
2. Алгебраические многочлены наилучшего равномерного приближения.
3. Тригонометрические многочлены наилучшего приближения.
4. Приближенное построение алгебраических многочленов наилучшего приближения.

Цели: 1) изучить основные понятия, определения и теоремы теории равномерного приближения непрерывных функций; 2) ознакомиться с построением алгебраических и тригонометрических многочленов наилучшего равномерного приближения; 3) научиться применять на практике изученную методику построения алгебраических многочленов наилучшего приближения.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, защита лабораторных работ.

Учебно-методическое обеспечение – [3] [5]–[8] [10]–[12] [15]–[20] из списка литературы.

Пусть R пространство функций $f(x)$ интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$. **Скалярным произведением** функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ называется выражение $(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$. **Нормой** элемента f называется число

$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx$. Если $(f, \varphi) = 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ **ортогональны**.

Пространство с такими свойствами обозначается $L_2[a, b]$.

Рассмотрим подпространство H состоящее из линейных комбинаций $n+1$ линейно независимых функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n.$$

Это подпространство называется **подпространством обобщенных многочленов** по системе функций $\{\varphi(x_i)\}$.

Среднеквадратичным отклонением элемента $\varphi \in H$ от элемента $f \in L_2$ называется величина

$$S^2 = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx. \text{ (если функция задана аналитически)}$$

В методе наименьших квадратов приближение элемента $f \in R$ элементом $\bar{\varphi} \in H$ осуществляется таким образом, чтобы величина среднеквадратичного отклонения была минимальна в L_2

$$S^2(c_0, \dots, c_n) = \|f - \bar{\varphi}\| = \inf_{\varphi \in H[a, b]} \|f - \varphi\|.$$

Если такой элемент $\bar{\varphi}$ существует, он называется элементом наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f \in R$ в подпространстве H .

Практика показывает, что приближающие функции, построенные по методу среднеквадратичного приближения, гораздо лучше описывают реальную функцию $f(x)$, чем интерполяционные многочлены.

Теорема 2.3. Для того чтобы элемент $\bar{\varphi}(x) \in H$ был элементом наилучшего среднеквадратичного приближения, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение

$$(f - \bar{\varphi}, \varphi) = 0 \quad (2.89)$$

для любого элемента $\varphi \in H$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует такой элемент φ_1 , что $(f - \bar{\varphi}, \varphi_1) = a \neq 0$. Без нарушения общности можно считать, что $\|\varphi_1\| = 1$. Возьмем элемент $\varphi_2 = \bar{\varphi} + a\varphi_1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_2\|^2 &= (f - \varphi_2, f - \varphi_2) = (f - \bar{\varphi} - a\varphi_1, f - \bar{\varphi} - a\varphi_1) = \\ &= (f - \bar{\varphi}, f - \bar{\varphi}) - a(\varphi_1, f - \bar{\varphi}) - a(f - \bar{\varphi}, \varphi_1) + a^2(\varphi_1, \varphi_1) = \\ &= \|f - \bar{\varphi}\|^2 - 2a^2 + a^2 = \|f - \bar{\varphi}\|^2 - a^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\|f - \varphi_2\|^2 < \|f - \bar{\varphi}\|^2$, что невозможно, так как $\bar{\varphi}$ является элементом наилучшего приближения.

Достаточность. Пусть $\varphi(x) \in H$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|^2 &= (f - \bar{\varphi} + \bar{\varphi} - \varphi, f - \bar{\varphi} + \bar{\varphi} - \varphi) = \\ &= \|f - \bar{\varphi}\|^2 + (\bar{\varphi} - \varphi, f - \bar{\varphi}) + (f - \bar{\varphi}, \bar{\varphi} - \varphi) + \|\bar{\varphi} - \varphi\|^2 = \|f - \bar{\varphi}\|^2 + \|\bar{\varphi} - \varphi\|^2. \end{aligned}$$

Если $\varphi \neq \bar{\varphi}$, то получим $\|f - \varphi\|^2 > \|f - \bar{\varphi}\|^2$ для произвольного $\varphi \in H$, то есть $\bar{\varphi}$ – элемент наилучшего среднеквадратичного приближения в подпространстве H . Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 в частности следует, что если взять в качестве элементов из H последовательно $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, то из условия ортогональности (2.89) получим

$$(f - \bar{\varphi}, \varphi_i(x)) = 0, \quad (2.90)$$

для любого $i = \overline{0, n}$.

Систему (2.90) можно переписать в виде

$$c_0(\varphi_0, \varphi_i) + c_1(\varphi_1, \varphi_i) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (2.91)$$

Матрица системы (2.91) $A = \{\varphi_i, \varphi_j\}$ симметрична, положительно определена и ее определитель, называемый определителем Грамма, для системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$ отличен от нуля. Следовательно, система (2.90) имеет единственное решение.

Возьмем в качестве H класс алгебраических многочленов

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n.$$

Тогда $(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b x^i x^j dx$, $(f, \varphi_i) = \int_a^b f(x) x^i dx$. Обозначим $s_i = \int_a^b x^i dx$, $m_i = \int_a^b f(x) x^i dx$.

Перепишем систему (2.91) в виде

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = m_0 \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \dots + c_n s_{n+1} = m_1 \\ \dots \\ c_0 s_n + c_1 s_{n+1} + \dots + c_n s_{2n} = m_n \end{cases} \quad (2.92)$$

Определитель этой системы как определитель Грамма линейно независимых на $[a, b]$ функций $1, x, x^2, \dots, x^n$ всегда положителен и система имеет единственное решение.

Если $\varphi = \bar{\varphi}$, то из (2.89) следует

$$\|f - \bar{\varphi}\|^2 = \|f\|^2 - \|\bar{\varphi}\|^2. \quad (2.93)$$

В этом случае, если система функций $\{\varphi_i(x)\}$ ортонормированна, т.е. $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l \\ 1, & \text{если } k = l \end{cases}$, то система (2.91) решается в явном виде

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = \overline{0, n}. \quad (2.94)$$

При этом погрешность можно вычислить по формуле

$$\|f - \bar{\varphi}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2. \quad (2.95)$$

Примером ортогональной системы функций являются многочлены Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (2.96)$$

которые ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ и $\|L_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Эти многочлены можно вычислить по рекуррентной формуле

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0. \quad (2.97)$$

Многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения по отрезку $[-1, +1]$ будет многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k L_k(x), \quad (2.98)$$

где $c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) L_k(x) dx$.

Отметим, что ряд Фурье по многочленам Лежандра для любой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ сходится равномерно.

Многочлены Лежандра применяются в образовании сферических функций, в которых решается ряд задач математической физики.

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $P_m(x)$ значительно меньше числа узлов n . В этом случае интерполирование становится невозможным и приходится прибегать к иным приемам построения приближающего полинома для данной функции. Обычно здесь используют *точечный способ наименьших квадратов*.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$. При точечном квадратичном аппроксимировании за меру отклонения полинома

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \quad (2.99)$$

от данной функции $y = f(x)$ на множестве точек берут величину

$$S_m = \sum_{i=0}^n (P_m(x_i) - f(x_i))^2, \quad (2.100)$$

равную сумме квадратов отклонений полинома $P_m(x)$ от функции $f(x)$ на заданной системе точек. (2.100) – *величина среднеквадратичного отклонения*.

Очевидно, что S_m есть функция коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m . Эти коэффициенты надо подобрать так, чтобы величина S_m была наименьшей. Полученный полином называется *аппроксимирующим* для данной функции, а процесс построения этого полинома – *точечной квадратичной аппроксимацией* или *точечным аппроксимированием* функции.

Если $m < n$, то для минимизации S_m , для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, воспользуемся общим приемом дифференциального исчисления. Найдем частные производные от величины

$$S_m = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$, по всем переменным a_0, a_1, \dots, a_m . Приравнивая эти частные производные нулю, получим для определения неизвестных a_0, a_1, \dots, a_m систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \dots \dots \dots \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_m} = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0. \end{cases} \quad (2.101)$$

Введем обозначения

$$s_k = x_0^k + x_1^k + \dots + x_n^k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + \dots + x_n^k y_n = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Тогда систему (2.101) можно записать в виде

$$\begin{cases} a_0s_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ms_m = t_0 \\ a_0s_1 + a_1s_2 + a_2s_3 + \dots + a_ms_{k+1} = t_1 \\ \dots \dots \dots a_0s_m + a_1s_{m+1} + a_2s_{m+2} + \dots + a_ms_{2m} = t_m. \end{cases} \quad (2.102)$$

где $s_0 = n + 1$.

Если среди точек x_i , $i = \overline{1, n}$ нет совпадающих, то определитель системы (2.102) отличен от нуля и, следовательно, эта система имеет

единственное решение. Полином (2.99) с коэффициентами a_i , определенными из (2.102), будет обладать минимальным квадратичным отклонением S_{min} .

Если $m = n$, то в качестве полинома $P_m(x)$ можно взять интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, так как для него величина среднеквадратичного отклонения равна нулю

$$S_{min} = \sum_{i=0}^n (L_n(x_i) - f(x_i))^2 = 0.$$

Вычислим, например, определитель системы (2.102), когда $m=1$. Тогда

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 = t_0 \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 = t_1 \end{cases}$$

и $\det = s_0 s_2 - s_1^2$. Учитывая неравенство Коши-Буняковского $\left(\sum_{i=0}^n x_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)(n+1)$, для попарно различных узлов x_i , получим $\det = (n+1)\sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)^2 > 0$. Отметим, что матрица системы (2.102) положительно определена, и для ее решения можно использовать, например, метод Зейделя или метод простой итерации.

Для составления системы (2.102) рекомендуется схема способа наименьших квадратов, приведенная в таблице, где принято $m=2$.

x_i^0	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$x_0 y_0$	$x_0^2 y_0$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	$x_3 y_3$	$x_3^2 y_3$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	y_4	$x_4 y_4$	$x_4^2 y_4$
S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	t_0	t_1	t_2

В общем случае, когда аппроксимирующий полином для данной функции $f(x)$ является обобщенным

$$P_m(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x),$$

для нахождения его коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m по способу наименьших квадратов приходится минимизировать сумму квадратов

$$S_m = \sum_{i=0}^n (a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) - f(x_i))^2,$$

где x_0, x_1, \dots, x_n — заданная система точек. Используя необходимые условия экстремума, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0, \varphi_0) + c_1(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + c_m(\varphi_m, \varphi_0) = (f, \varphi_0) \\ c_0(\varphi_0, \varphi_1) + c_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + c_m(\varphi_m, \varphi_1) = (f, \varphi_1) \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ c_0(\varphi_0, \varphi_m) + c_1(\varphi_1, \varphi_m) + \dots + c_m(\varphi_m, \varphi_m) = (f, \varphi_m) \end{cases}$$

Из этой системы определяются коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m .

Квадратичная аппроксимация функций основывалась на способе наименьших квадратов. Уточняя понятие квадратичного отклонения, введём соответствующее расстояние Δ между данной непрерывной функцией $f(x)$ и непрерывным аппроксимирующим обобщенным полиномом $Q_m(x)$ так называемое среднее квадратичное отклонение.

Под **средним квадратичным отклонением функции** $f(x)$ и полинома $Q_m(x)$ на множестве точек $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ понимается число

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (f(x_i) - Q_m(x_i))^2} \quad (2.103)$$

Если функция $f(x)$ задана аналитически, в этом случае аппроксимация называется **интегральной**, а среднее квадратичное отклонение на отрезке $[a, b]$ определяется формулой

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - Q_m(x))^2 dx}. \quad (2.104)$$

Формулу (2.104) можно рассмотреть как предельный случай формулы (2.103) при $n \rightarrow \infty$. Действительно, выбирая на отрезке $[a, b]$ систему равноотстоящих точек

$$a = x_1, x_2, \dots, x_n = b, \text{ где } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

будем иметь

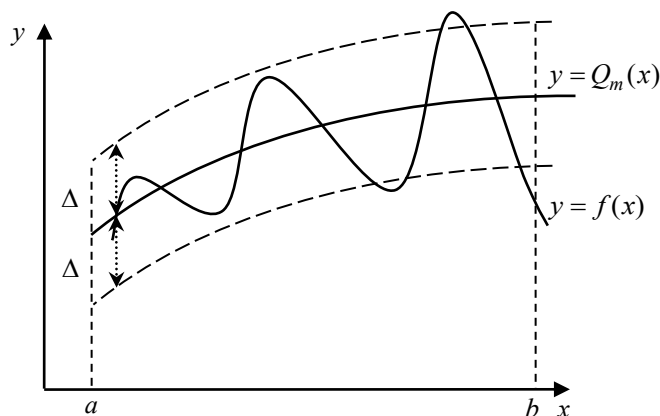
$$\Delta_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - Q(x_i))^2 = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - Q(x_i))^2 \Delta x_i.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получим,

$$\Delta^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x_i) - Q(x_i))^2 dx.$$

Если среднее квадратичное отклонение Δ мало, то для большинства значений x из $[a, b]$ абсолютная величина $|f(x) - Q(x)|$ также мала при $x \in [a, b]$.

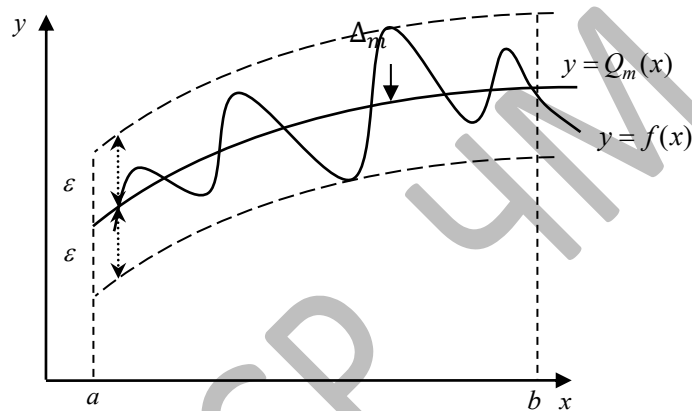
Следовательно $\Delta < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.



Такая ситуация наблюдается в ряде случаев при обработке наблюдений. Однако с помощью приближения функции мы можем получить закон изменения результатов наблюдений. Во многих случаях, например, при обработке результатов эксперимента оно сглаживает отдельные локальные неровности. Однако иногда для приближения функций ставят более жесткие условия: требуются гарантировать, чтобы отклонение на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и полинома $Q(x)$ было меньше заданной величины, то есть равно величине абсолютного отклонения.

Абсолютным отклонением на отрезке $[a, b]$ обобщенного полинома $Q(x)$ от непрерывной функции $f(x)$ называется число

$$\Delta(f, Q_m) = \Delta_m = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_m(x)| \quad (2.105).$$



Если $\Delta_m \leq \varepsilon$, то из формулы (2.105) следует $|f(x) - Q_m(x)| \leq \varepsilon$ для всех точек x на отрезке $[a, b]$. Тогда говорят, что обобщенный полином $Q_m(x)$ на отрезке $[a, b]$ *равномерно приближает функцию $f(x)$ с точностью до ε* .

Для случая алгебраических многочленов

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

справедлива теорема Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ то, как бы мало ни было положительное число ε , найдется полином $Q_m(x)$ достаточно высокой степени $m < n$ абсолютное отклонение которого от данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меньше ε , то есть для всех точек $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon$.

Контроль правильности вычисления.

1. Прежде всего, после решения системы уравнений, например, (2.102), необходимо подставить коэффициенты в уравнения системы (2.102) и проверить, совпадает ли значение левой части с правой;
2. Поскольку аппроксимирующий многочлен не совпадает со значением функции на заданном множестве точек, то следует вычислять по

формуле (2.103) величину Δ для точечного метода наименьших квадратов или по формуле (2.104) для интегрального метода наименьших квадратов. Если после подстановки в многочлены значения x , где известно значение функции, отклонение между ними не будет превосходить величину Δ , то аппроксимирующий многочлен построен правильно.

Тема 2. Интерполирование и приближение функций

Лекция 13. Среднеквадратичные приближения (3ч. – 2ч. УСП+1ч. ЛР)

1. Постановка задачи, основные понятия, определения и теоремы. Приближения в гильбертовом пространстве.
2. Среднеквадратичные приближения функций алгебраическими многочленами.
3. Среднеквадратичные приближения функций тригонометрическими многочленами.
4. Приближение функций, заданных таблицей, по методу наименьших квадратов.
5. Приближения по методу наименьших квадратов алгебраическими многочленами.

Цели: 1) ознакомиться с постановкой задачи среднеквадратичного приближения, с понятиями точечной и интегральной аппроксимации функций, методом наименьших квадратов; 2) научиться применять методы точечной и интегральной аппроксимации функций, метод наименьших квадратов; 3) научиться интерпретировать полученные результаты.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, защита лабораторных работ.

Учебно-методическое обеспечение – [3] [5]–[8] [10]–[12] [15]–[20] из списка литературы.

См. материал Лекции 13.

Тема 3. Приближенное вычисление интегралов

Лекция 16. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ) (3ч. – 2ч. УСР+1ч. ЛР)

1. Постановка задачи. Теоремы существования и единственности, о свойствах узлов квадратурных формул НАСТ.

2. Частные случаи квадратурных формул НАСТ. Квадратурные формулы с заранее предписанными узлами и равными коэффициентами.

3. Квадратурная формула Гаусса. Коэффициенты формул Гаусса. Остаточный член формулы Гаусса.

Цели: 1) ознакомиться с основными понятиями, постановкой задачи о приближенном вычислении определенных интегралов с помощью квадратурных формул НАСТ; 2) научиться применять квадратурную формулу Гаусса.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, защита лабораторных работ.

Учебно-методическое обеспечение – [5]–[8] [11] [12] [15]–[20] [22] из списка литературы.

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ). Постановка задачи. На предыдущей лекции мы получили формулы численного интегрирования с равноотстоящими узлами путем замены подынтегральной функции алгебраическим интерполяционным многочленом с равноотстоящими узлами интерполирования.

Если мы не будем требовать равномерного распределения узлов на отрезке интегрирования, то можно получить формулы, точные для многочленов более высокой степени. Будем строить квадратурные формулы интерполяционного типа, имеющие при заданном числе узлов n наивысшую алгебраическую степень точности, т.е. будем находить узлы и коэффициенты квадратурных формул из условия, что их остаточные члены обращаются в нуль для всех многочленов максимально высокой степени.

Итак, имеем задачу: на отрезке $[a, b]$ необходимо выбрать узлы x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и определить коэффициенты A_i таким образом, чтобы квадратурное правило

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (3.26)$$

было точным для всех многочленов наивысшей возможной степени m . При построении квадратурной формулы будем считать, что весовая функция $p(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_a^b |p(x)x^i| dx < q, \quad i > 0, \quad \text{и} \quad \int_a^b |p(x)| dx > 0.$$

В правиле (3.26) содержится $2n$ неизвестных: $A_i, x_i, i = 1, 2, \dots, n$, поэтому следует ожидать, что при надлежащем выборе узлов и квадратурных коэффициентов оно будет точным для всех многочленов степени $m = 2n - 1$.

Теорема 3.2. Для того чтобы квадратурное правило (3.1) было точным для всех многочленов степени не выше $2n - 1$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1. Правило (3.26) должно быть интерполяционным, то есть, коэффициенты должны вычисляться по формулам:

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx. \quad (3.27)$$

2. Многочлен $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ должен быть ортогонален на отрезке $[a, b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени меньше n :

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (3.28)$$

Итак, задача о построении квадратурного правила (3.1) сводится к задаче об отыскании многочлена $\omega(x)$, который обладает свойством 2 (равенство (3.28)). Покажем, что такой многочлен существует, все его корни действительны, различны и принадлежат отрезку $[a, b]$, о чем говорят следующие леммы.

Лемма 3.1. Если весовая функция $p(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, то существует и притом единственный многочлен $\omega(x)$ ортогональный на $[a, b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену степени меньше n .

Доказательство. Будем искать многочлен в виде $\omega(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. Из условия ортогональности для определения коэффициентов a_i получим систему n уравнений

$$\int_a^b p(x) [x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n] x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Достаточно показать, что соответствующая однородная система имеет лишь нулевое решение

$$\int_a^b p(x) [a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n] x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Умножим последовательно каждое уравнение на a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 и просуммируем. В результате получим уравнение

$$\int_a^b p(x) [a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n]^2 dx = 0.$$

В силу того, что $p(x)$ не меняет знак на $[a, b]$, то последнее равенство возможно лишь тогда, когда все $a_i = 0$. Теорема доказана.

Лемма 3.2. Если $p(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$ и многочлен $\omega(x)$ ортогонален на $[a, b]$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени меньше n , то все корни $\omega(x)$ действительны, различны и лежат внутри $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ – корни, которые лежат внутри $[a, b]$ и имеет нечетную кратность. Допустим, что $m < n$. Построим многочлен $\rho(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$. Для него должно выполняться равенство

$$\int_a^b p(x)\omega(x)\rho(x)dx = 0.$$

С другой стороны, многочлен $\omega(x)\rho(x)$ содержит только четные степени и поэтому

$$\int_a^b p(x)\omega(x)\rho(x)dx \neq 0.$$

Значит, $m = n$. Теорема доказана.

Итак, таким образом, квадратурное правило наивысшей алгебраической степени точности (3.26) существует при любом n и является единственным. Можно показать, что ни при каком выборе узлов x_i и коэффициентов A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ квадратурное правило не будет точным для всех многочленов степени $2n$. Если $p(x) \geq 0$ и квадратурное правило является точным для всех многочленов степени $2n-2$, то все квадратурные коэффициенты $A_i > 0$.

Действительно, если $f(x) = \left[\frac{\omega(x)}{x - x_i} \right]^2$, то $\int_a^b p(x)f(x)dx = A_i [\omega'(x_i)]^2$. Откуда получаем

$$A_i = \int_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} \right]^2 dx > 0.$$

Квадратурная формула Гаусса. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности для случая $p(x) \equiv 1$ впервые построил Гаусс. Поэтому и для любого $p(x)$ подобные формулы называют формулами Гаусса.

Построим квадратурное правило, т.е. найдем общий вид $\omega(x)$, когда $p(x) = 1$. Введем обозначения

$$\int_a^x \omega(x)dx = \varphi_1(x),$$

$$\int_a^x \varphi_1(x)dx = \varphi_2(x), \dots, \int_a^x \varphi_{n-1}(x)dx = \varphi_n(x).$$

Будем вычислять интеграл $\int_a^b \omega(x)q(x)dx$, где $q(x)$ – многочлен степени не выше $n-1$. Применяя последовательно формулу интегрирования по частям, учитывая (3.28), получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \omega(x)q(x)dx = \int_a^x \omega(x)dx q(x) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi_1(x)q'(x)dx = \dots \\ &= \left[\varphi_1(x)q(x) - \varphi_2(x)q^{(1)}(x) + \varphi_3(x)q^{(2)}(x) - \dots + (-1)^{n-1} \varphi_n(x)q^{(n-1)}(x) \right] \Big|_a^b. \end{aligned}$$

При $x = a$ правая часть уравнения обращается в нуль, так как $\varphi_i(a) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому в силу произвольности $q(x)$ справедливы равенства

$$\varphi_1(b) = \varphi_2(b) = \dots = \varphi_n(b) = 0.$$

Следовательно, $\varphi_n(x)$ имеет корни кратности n при $x = a$ и $x = b$ и может быть записана в виде

$$\varphi_n(x) = C(x-a)^n(x-b)^n,$$

где C – постоянная.

Отсюда для $\omega(x)$ получим

$$\omega(x) = C \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n(x-b)^n].$$

Постоянная C подбирается из условия, что коэффициент при x^n в $\omega(x)$ равен 1. Чтобы определить величину этого коэффициента, вычислим

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n} = 2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)x^n = \frac{(2n)!}{n!} x^n.$$

Следовательно, $C = \frac{n!}{(2n)!}$.

Итак, окончательно получаем

$$\omega(x) = \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n(x-b)^n]. \quad (3.29)$$

Последовательное применение теоремы Ролля показывает, что все корни уравнения $\omega(x) = 0$, действительны, различны и принадлежат интервалу $[a, b]$. Таким образом, их действительно можно использовать в качестве узлов интерполяции, и полученная при этом формула численного интегрирования будет удовлетворять поставленным условиям.

Вычисляя корни многочлена (3.29) и коэффициенты A_k по формуле (3.27), мы получим квадратурное правило наивысшей алгебраической степени точности, которое **называется квадратурной формулой Гаусса**.

Остаточный член формулы Гаусса. Исследуем остаточный член полученных формул численного интегрирования. Пусть $f(x)$ – произвольная, достаточное количество раз дифференцируемая функция. Построим интерполяционный многочлен Эрмита $H(x)$ степени $2n-1$, такой что $H(x_i) = f(x_i)$ и $H'(x_i) = f'(x_i)$, причём x_1, x_2, \dots, x_n – корни уравнения $\omega(x) = 0$.

Тогда

$$f(x) = H(x) + \frac{\omega^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta).$$

Проинтегрируем с весом $p(x)$ левую и правую части последнего выражения

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)p(x)dx &= \int_a^b p(x)H(x)dx + \int_a^b p(x) \frac{\omega^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta)dx = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i H(x_i) + \int_a^b p(x) \frac{\omega^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \int_a^b p(x) \frac{\omega^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta)dx = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b p(x)\omega^2(x)dx. \end{aligned}$$

Таким образом, остаточный член будет иметь вид

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b p(x)\omega^2(x)dx.$$

При $p(x) \equiv 1$ выражение для $R(f)$ можно упростить, интегрируя по частям. Воспользуемся ранее введенными функциями $\varphi_i(x)$

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(x) \omega(x) dx &= \varphi_1(x) \omega(x) \Big|_a^b - \int_a^b \varphi_1(x) \omega'(x) dx = \dots = (-1)^n \int_a^b \varphi_n(x) \omega^{(n)}(x) dx \\ &= (-1)^n n! \int_a^b \varphi_n(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^b \omega^2(x) dx = (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} n! \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx.$$

Вычислим интеграл по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx &= - \int_a^b \frac{(x-a)^{n+1} (x-b)^{n-1}}{(n+1)} n dx = \dots \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)} dx. \end{aligned}$$

Возвращаемся

$$\int_a^b \omega^2(x) dx = (-1)^{2n} \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2} \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)}.$$

Итак, при $p(x) \equiv 1$ погрешность $R(f)$ принимает вид

$$R(f) = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{(2n)}(\xi). \quad (3.30)$$

Коэффициенты формул Гаусса. Коэффициенты A_k при известных значениях x_k могут быть вычислены по формуле

$$A_k = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (x_k - a)(b - x_k) \omega'^2(x_k)}. \quad (3.31)$$

Все корни многочлена $\omega(x)$ расположены симметрично относительно средней точки $\frac{a+b}{2}$, так, что для всякой точки x_k найдется симметричная ей точка x_{n-k+1} и, следовательно, $A_k = A_{n-k+1}$, то есть коэффициенты при $f(x_k)$ и $f(x_{n-k+1})$ совпадают.

Корни x_k и коэффициенты A_k можно вычислить для фиксированного отрезка $[-1, 1]$. Любой отрезок $[a, b]$ путем замены $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$ приводится к отрезку $[-1, 1]$ и коэффициенты можно вычислить раз и навсегда. Запишем квадратурное правило (3.26) для отрезка $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{(2n)}(\xi). \quad (3.32)$$

Тогда для общего отрезка $[a, b]$ получим

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) \frac{b-a}{2} dt = \\ &= (b-a) \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) R(f). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Выпишем значение узлов x_k , коэффициентов A_k и погрешностей $R(f)$ для нескольких первых значений n

$$n=1, \quad x_1=0, \quad A_1=2, \quad R_1(f)=\frac{1}{3}f''(\xi);$$

$$n=2, \quad x_2=-x_1=0.5773502692, \quad A_1=A_2=1, \quad R_2(f)=\frac{1}{135}f^{(4)}(\xi);$$

$$n=3, \quad x_2=0, \quad x_3=-x_1=0.7745966692, \quad A_2=\frac{8}{9}, \quad A_1=A_3=\frac{5}{9},$$

$$R_2(f)=\frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi);$$

$$n=4, \quad x_3=-x_2=0.3399810436, \quad x_4=-x_1=0.8611363116, \\ A_2=A_3=0.6521451549, \quad A_1=A_4=0.3478548451, \quad R_2(f)=\frac{1}{3472875}f^{(8)}(\xi).$$

Из приведенных значений видно, что с ростом n знаменатель в выражении для погрешности растет очень быстро. Поэтому для $n \geq 4$ квадратурное правило Гаусса имеет высокую точность. Отметим, что $\sum_{i=1}^n A_i = 1$, $A_i > 0$ для любого i и, следовательно, с ростом n коэффициенты A_i остаются ограниченными величинами. На практике формулы можно применять для небольших n в виде обобщенных формул: $h = \frac{b-a}{m}$. Полагаем в (3.33)

$$\begin{aligned} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx &= \int_{-1}^1 f\left(a + (i+0.5)h + \frac{h}{2}t\right) \cdot \frac{h}{2}dt \\ &= h \sum_{k=1}^n A_k f\left(a + (i+0.5)h + \frac{h}{2}t_k\right) + \frac{h^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\xi). \end{aligned}$$

Для всего отрезка получим формулу

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= h \sum_{k=1}^n A_k \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + (i+0.5)h + \frac{h}{2}t_k\right) \\ &\quad + \frac{h^{2n}(b-a)(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\bar{\eta}). \end{aligned}$$

При $h=2$ составная формула имеет простой вид

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} [f(a + h(i+0.5(1+t_1))) + f(a + h(i+0.5(1-t_1)))] \\ &\quad + \frac{h^4(b-a)}{135} f^{(4)}(\bar{\eta}), \end{aligned}$$

где $t_1 = 0.577350$.

Тема 3. Приближенное вычисление интегралов

Лекция 17. Формулы численного интегрирования Чебышева (2ч. УСР)

1. Постановка задачи.
2. Алгоритм построения формул Чебышева. Абсциссы формул Чебышева. Пример.
3. Остаточный член формул Чебышева.

Цели: 1) ознакомиться с задачами, приводящими к применению формул Чебышева; 2) изучить алгоритм построения формулы Чебышева; 3) уметь применить на практике изученную формулу.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, тестовые задания.

Учебно-методическое обеспечение – [5]–[8] [11] [12] [15]–[20] [22] из списка литературы.

Правила приближенного интегрирования, все коэффициенты которых одинаковы

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx C_n \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (3.34)$$

очень удобны при графических расчетах, т.к. сумму ординат легко можно измерить с чертежа при помощи простых измерительных приборов.

Формула (3.34) содержит $n + 1$ параметров C_n и x_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Их можно постараться выбрать так, чтобы равенство выполнялось точно для всех многочленов степени n , что равносильно выполнению равенств

$$\int_a^b p(x)x^i dx = C_n \sum_{k=1}^n x_k^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.35)$$

Правила интегрирования, обладающие этим свойством, называются формулами Чебышева.

Приведем алгоритм построения формул Чебышева при выполнении одного естественного условия.

Условия точного выполнения (3.34) для $f(x) \equiv 1$ доставит уравнение для нахождения C_n

$$\int_a^b p(x)dx = C_n \cdot n, \quad C_n = \frac{1}{n} \int_a^b p(x)dx.$$

Случай, когда $C_n = 0$ является особым и интереса не представляет.

Поэтому будем считать $\int_a^b p(x)dx \neq 0$.

Если потребовать, чтобы (3.34) выполнялось точно для $f = x, x^2, \dots, x^n$, получим для нахождения x_k систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = C_n^{-1} \int_a^b p x dx = C_n^{-1} \cdot \mu_1 \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = C_n^{-1} \int_a^b p x^2 dx = C_n^{-1} \cdot \mu_2 \\ &\dots \dots \dots \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = C_n^{-1} \int_a^b p x^n dx = C_n^{-1} \cdot \mu_n \end{aligned} \right\}. \quad (3.36)$$

Удобнее искать не узлы x_k ($k=1, 2, \dots, n$), а многочлен $\omega(x)$, для которого они будут простыми корнями

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n. \quad (3.37)$$

Коэффициенты его A_k являются хорошо известными элементарными симметрическими функциями корней x_k .

Левые части равенств (3.36) s_1, s_2, \dots, s_n также есть симметрические функции x_k , справа же стоят их значения. В алгебре известны соотношения между A_i и s_j

$$\left. \begin{aligned} s_1 + A_1 &= 0 \\ s_2 + A_1 s_1 + 2A_2 &= 0 \\ s_3 + A_1 s_2 + A_2 s_1 + 3A_3 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ s_n + A_1 s_{n-1} + A_2 s_{n-2} + \dots + nA_n &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.38)$$

Эти формулы позволяют по известным значениям s_1, s_2, \dots, s_n найти последовательно и притом единственным образом A_1, A_2, \dots, A_n . По коэффициентам A_k мы можем построить $\omega(x)$ и, решив уравнение $\omega(x) = 0$, найти узлы x_k правила интегрирования. При этом может оказаться, что некоторые x_k будут комплексными.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 3.3. Если $\int_a^b p(x) dx \neq 0$, формула (3.34) с действительными или комплексными узлами x_k всегда может быть построена и притом единственным способом.

Когда среди x_k существуют комплексные, правило (3.34) будет иметь ограниченное значение и может оказаться полезным лишь при интегрировании аналитических функций, регулярных в области, охватывающей достаточно широкий отрезок $[a, b]$.

Поэтому одной из задач теории формул Чебышева является нахождение тех случаев, когда все узлы x_k будут действительными.

Рассмотрим частный случай формул Чебышева, когда $p(x) \equiv 1$. Отрезок интегрирования будем считать приведенным к $[-1, 1]$ и рассмотрим формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx C_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (3.36)$$

C_n и x_k нужно выбрать так, чтобы равенство было точным для степеней x от нулевой до n . Коэффициент C_n определится из условия, чтобы формула давала точный результат для $f(x) \equiv 1$

$$\int_{-1}^1 1 dx = 2 = C_n n, \quad C_n = \frac{2}{n}.$$

Ввиду $\int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} [1 - (-1)^{k+1}]$ и (3.36) для определения x_k здесь будут

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = \frac{n}{2} \frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}] \end{aligned} \right\}. \quad (3.37)$$

Они дают значения симметрических функций s_k и позволяют при помощи соотношений (3.38) построить систему для коэффициентов A_k многочлена $\omega(x)$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0 \\ \frac{n}{3} + 2A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 \\ \frac{n}{5} + \frac{n}{3} A_2 + 4A_4 &= 0 \\ A_5 &= 0 \\ \frac{n}{7} + \frac{n}{5} A_2 + \frac{n}{3} A_4 + 6A_6 &= 0 \\ A_7 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\}. \quad (3.38)$$

Так как A_k с нечетными индексами k равны нулю, в многочлене $\omega(x)$ сохраняются только либо одни четные, либо одни нечетные степени x

$$\omega(x) = x^n + A_2 x^{n-2} + A_4 x^{n-4} + \dots$$

Корни $\omega(x)$, являющиеся узлами правила (3.36), будут располагаться симметрично относительно нуля оси x .

При нечетном n один из корней x_k будет равен нулю.

При нечетном n , кроме уравнений (3.37), ввиду симметрии расположения x_k относительно нуля оси x , будет выполняться также равенство

$$S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} = 0$$

и правило (3.36) будет точным для многочленов степени $n+1$, а не только степени n , как предусматривается в постановке задачи.

Рассмотрим несколько частных случаев.

При $n=1$ $\omega(x) = x$, $x_1 = 0$, $C_1 = 2$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0).$$

Это есть правило прямоугольников с высотой, равной ординате в средней точке.

При $n=2$ $\omega(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $C_2 = 1$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Правило выполняется точно для многочленов третьей степени и совпадает с формулой Ньютона для двух узлов.

При $n=3$ $\omega(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C_3 = \frac{2}{3}$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

Абсциссы формул Чебышева при различных значениях n и i даются следующей таблицей, для $n = 1(1)7, 9$

$n = 2$	$-x_1 = x_2 = 0.577350$		
$n = 3$	$-x_1 = x_3 = 0.707107$	$x_2 = 0$	
$n = 4$	$-x_1 = x_4 = 0.794654$	$-x_2 = x_3 = 0.187592$	
$n = 5$	$-x_1 = x_5 = 0.832498$	$-x_2 = x_4 = 0.374541$	$x_3 = 0$
$n = 6$	$-x_1 = x_6 = 0.866247$	$-x_2 = x_5 = 0.422519$	
	$-x_3 = x_4 = 0.266635$		
$n = 7$	$-x_1 = x_7 = 0.883862$	$-x_2 = x_6 = 0.0529657$	
	$-x_3 = x_5 = 0.323912$	$x_4 = 0$	
$n = 9$	$-x_1 = x_9 = 0.911589$	$-x_2 = x_8 = 0.601019$	
	$-x_3 = x_7 = 0.528762$	$-x_4 = x_6 = 0.167906$	$x_5 = 0$

При $n = 8$, как показали вычисления, среди x_k будут два комплексных. Было показано С.Н. Бернштейном что при $n > 9$ среди узлов Чебышева будут комплексные.

Остаточный член формул Чебышева. Ограничимся случаем $p(x) \equiv 1$. Пусть число ординат, использованных в формуле Чебышева, равно n . Соответствующий остаточный член будем обозначать $R_n(f)$. Известно, что $R_n(f) = 0$, когда $f(x)$ является произвольным многочленом степени n . Если n – четное число, то $R_n(f)$ обращается в нуль и для произвольного многочлена степени не выше $n + 1$.

Остаточный член формул Чебышева

$$R_n(f) = M_n f^{(m+1)}(\xi),$$

где постоянная M_n не зависит от вида функции $f(x)$ и находится по формуле

$$M_n = \frac{2}{(m+1)!} \left[\frac{1}{m+2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \right].$$

Приведем готовые выражения остаточных членов для тех значений n , для которых формулы Чебышева существуют

$$\begin{aligned} R_1(f) &= \frac{1}{3} f''(\xi); & R_2(f) &= \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi); \\ R_3(f) &= \frac{1}{360} f^{(4)}(\xi); & R_4(f) &= \frac{2}{42525} f^{(6)}(\xi); \\ R_5(f) &= \frac{13}{544320} f^{(6)}(\xi); & R_6(f) &= \frac{1}{3969000} f^{(8)}(\xi); \\ R_7(f) &= \frac{281}{1959552000} f^{(8)}(\xi); & R_9(f) &= \frac{74747}{11200 \cdot 9 \cdot 11!} f^{(10)}(\xi). \end{aligned}$$

Тема 3. Приближенное вычисление интегралов

Лекция 19. Вычисление несобственных интегралов (2ч. УСП)

1. Постановка задачи. Методы выделения особенностей.
2. Мультипликативный способ.
3. Аддитивный способ.
4. Функции с несколькими особенностями.

Цели: 1) ознакомиться с методами выделения особенностей при вычислении несобственных интегралов; 2) научиться применять мультипликативный способ и аддитивный способ при вычислении несобственных интегралов.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, тестовые задания.

Учебно-методическое обеспечение – [5]–[8] [11] [12] [15]–[20] [22] из списка литературы.

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, связанными с вычислением несобственных интегралов. Это могут быть интегралы с бесконечными пределами или интегралы с конечными пределами, но подынтегральной функцией, обращающейся в бесконечность на отрезке интегрирования.

Несобственный интеграл с бесконечными пределами всегда можно преобразовать в несобственный интеграл или даже собственный с конечными пределами. Для этого достаточно произвести подходящую замену переменного под знаком интеграла или взять интеграл в конечных, но достаточно больших пределах так, что отбрасываемая часть интеграла значительно меньше, чем заданная нам точность вычисления интеграла. В последнем случае часто пользуются асимптотическими выражениями подынтегральных функций для оценки отбрасываемой части интеграла или для учета ее вклада в интеграл.

Интегралы от разрывных функций. При вычислении несобственных интегралов с конечными пределами интегрирования удобнее всего использовать *метод выделения особенностей*. Существует два метода выделения особенностей: *мультипликативный* и *аддитивный*.

Мультипликативный способ. Пусть необходимо вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ имеет некоторые особенности на промежутке $[a, b]$ (обращается в бесконечность в одной или нескольких точках отрезка $[a, b]$).

Представим подынтегральную функцию в виде произведения двух функций $\varphi(x)$ и $p(x)$

$$f(x) = \varphi(x)p(x), \quad (3.48)$$

причем $\varphi(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет достаточное число производных, а $p(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда оказывается возможным подобрать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)dx \approx \sum_{k=1}^n C_k^{(n)}\varphi(x_k), \quad (3.49)$$

в которой постоянные коэффициенты $C_k^{(n)}$ не зависят от $\varphi(x)$, а абсциссы x_k определяются таким образом, чтобы формула была точной для многочленов наивысшей возможной степени. Функция $p(x)$ называется *весовой функцией* или *весом*. Смысл применения квадратурных формул с весом $p(x)$ для интегрирования разрывных функций состоит в том, что остаточный член не зависит от $p(x)$, т.е. от разрывной части функции.

Приведем значения $C_k^{(n)}$ и x_k для случая, когда $a = 0$, $b = 1$ и весовая функция имеет вид $p(x) = x^{-1/2}$:

значения x_k и $C_k^{(n)}$ для квадратурной формулы

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} dx \approx \sum_{k=1}^n C_k^{(n)} \varphi(x_k)$$

n	k	x_k	$C_k^{(n)}$
3	1	0.056939	0.935828
	2	0.437198	0.721523
	3	0.869499	0.342649
4	1	0.033648	0.725368
	2	0.276184	0.627413
	3	0.634677	0.444762
	4	0.922157	0.202457

При $a = -1$, $b = 1$ и $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет место *квадратурная формула Эрмита*

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k), \quad (3.50)$$

где $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ и $R(f) = \frac{\pi}{(2n)!2^{n-1}} f^{(2n)}(\xi)$, $-1 < \xi < 1$.

Пример 3.1. Вычислим приближенно интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде (3.48)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

и будем рассматривать функцию

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

как весовую. Тогда для вычисления данного интеграла можно использовать квадратурную формулу Эрмита (3.50)

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+x_k^2}}.$$

Взяв $n = 6$, получим

$$I \approx \frac{\pi}{6} \left[\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 15^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 45^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 75^\circ}} \right] = 2.220329.$$

Непосредственное вычисление интеграла с шестью верными знаками дает $I = 2.221441$.

Пример 3.2. Вычислим приближенно интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}}.$$

Решение. Обозначим

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{4-x}.$$

Используем значения x_k и $C_k^{(n)}$, приведенные в таблице при $n = 4$, по формуле (3.49) получаем

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}} \approx \frac{0.7254}{3.9664} + \frac{0.6274}{3.7238} + \frac{0.4448}{3.3653} + \frac{0.2025}{3.0778} = 0.5493.$$

Непосредственное вычисление интеграла дает

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.5493.$$

Аддитивный способ. Представим подынтегральную функцию в виде $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x)$ не имеет особенностей и обладает достаточным числом непрерывных производных, а интеграл от $\psi(x)$ может быть найден точными методами интегрального исчисления.

Пример 3.3. Пусть необходимо вычислить

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx.$$

Решение. Подынтегральную функцию представим в виде

$$\ln \sin x = \ln x + \ln \frac{\sin x}{x}.$$

Тогда

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Первый интеграл легко вычисляется

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x \, dx = \frac{\pi}{2} (\ln \frac{\pi}{2} - 1) = -0.861451.$$

Подынтегральная функция в I_2 не имеет особенностей на отрезке интегрирования. Вычислим I_2 по формуле Симпсона (3.19), разбив отрезок интегрирования на 2 части. Получим

$$I_2 \approx \frac{\pi}{12} [0 - 0.4200356 - 0.4515825] = -0.228189.$$

Таким образом,

$$I \approx I_1 + I_2 = -1.089640.$$

Рассмотрим некоторые приемы представления подынтегральной функции в виде суммы. Выведем правило построения такой функции для одного часто встречающегося класса интегралов.

Пусть $f(x) = (x-c)^\alpha \varphi(x)$, $\alpha > -1$, $c \in [a, b]$, а $\varphi(x)$ — может быть представлена на отрезке $[a, b]$ формулой Тейлора по степеням $(x-c)$ с остаточным членом, зависящим от производной порядка m . Тогда $f(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x) = & [\varphi(c)(x-c)^\alpha + \frac{\varphi^{(1)}(c)}{1!}(x-c)^{\alpha+1} + \frac{\varphi^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^{\alpha+2} + \dots \\ & + \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{\alpha+k}] + \\ & + (x-c)^\alpha [\varphi(x) - \varphi(c) - \frac{\varphi^{(1)}(c)}{1!}(x-c) - \dots - \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k], \quad k < m. \end{aligned}$$

Первая квадратная скобка правой части является степенной функцией и поэтому легко интегрируется. Вторая квадратная скобка обращается в нуль в точке $x=c$ вместе со всеми производными до k -го порядка включительно. Произведение этого выражения на множитель $(x-c)^\alpha$ будет функцией, непрерывной вместе с производными до порядка $k-1$. Поэтому для вычисления интеграла от этой функции можно применить одну из известных квадратурных формул.

Пример 3.4. Вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв при $x=0$. Запишем ее в виде

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $c = 0$, $\varphi(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

По формуле Тейлора имеем

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + R_4(x).$$

Тогда $f(x)$ можем записать в виде

$$f(x) = \left[x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{16}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{128}x^{\frac{7}{2}} \right] + \frac{\psi(x)}{\sqrt{x}},$$

где $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \right)$,

причем $\psi(0) = 0$.

Отсюда

$$I = \int_0^{0.5} \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{16}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{128}x^{\frac{7}{2}} \right) dx + I_1 = 1.5691585 + I_1,$$

где

$$I_1 = \int_0^{0.5} \frac{\psi(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Интеграл I_1 вычисляем по формуле Симпсона при $n = 10$, т. е. $h = 0.05$.
В результате вычислений получаем

$$I_1 = \frac{0.05}{3} \cdot 0.098309 = 0.0016385.$$

Окончательно получаем,

$$I = \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 1.5691585 + 0.0016385 = 1.5707970.$$

Точное значение интеграла $I = \frac{\pi}{2} = 1.5707963$.

Интегралы с бесконечными пределами

Метод усечения. Для того чтобы приближенно вычислить сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

с точностью до ε , представляют его в виде

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx,$$

где b выбирают настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_b^{\infty} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

вычисляют по одной из квадратурных формул с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$ и приближенно полагают

$$\int_a^\infty f(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx.$$

Пример 3.5. Вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

с точностью до $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение. Выбираем число b так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \frac{10^{-2}}{2}.$$

Заметив, что

$$\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \int_b^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2b^2},$$

выбираем b из условия

$$\frac{1}{2b^2} = \frac{10^{-2}}{2},$$

откуда получаем $b = 10$. Полагаем приближенно

$$\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} \approx \int_2^{10} \frac{dx}{1+x^3} = I$$

и вычисляем полученный определенный интеграл с точностью до $\frac{10^{-2}}{2}$ по формуле Симпсона. Окончательно имеем $\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} = 0.12$.

Применение квадратурных формул с весом. При вычислении интегралов

$$\int_a^\infty p(x)\varphi(x)dx$$

часто бывает удобно использовать квадратурные формулы вида

$$\int_a^\infty p(x)\varphi(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} \varphi(x_k), \quad (3.51)$$

в которых коэффициенты $A_k^{(n)}$ не зависят от $\varphi(x)$ и абсциссы x_k подбираются так, чтобы формула была точной для многочленов наивысшей возможной степени.

При $p(x) = e^{-x^2}$ имеют место квадратурные формулы с весом Чебышева-Эрмита

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} \varphi(x_k), \quad (3.52)$$

точные для многочленов, степени не выше $2n - 1$. Остаточный член формулы имеет вид

$$R_n(\varphi) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} \varphi^{(2n)}(\xi).$$

Приведем значения коэффициентов $A_k^{(n)}$ и абсцисс x_k для некоторых n

n	x_k	$A_k^{(n)}$
3	$-x_1 = x_3 = 1.224745$ $x_2 = 0$	$A_1 = A_3 = 0.295409$ $A_2 = 1.181636$
4	$-x_1 = x_4 = 1.650680$ $-x_2 = x_3 = 0.524648$	$A_1 = A_4 = 0.081313$ $A_2 = A_3 = 0.804914$

Пример 3.6. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx$$

по квадратурной формуле (3.52) при $n = 4$.

Решение. Так как узлы квадратурные формулы расположены симметрично относительно $x = 0$, а коэффициенты, соответствующие симметричным узлам, равны, то по формуле (3.52) имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx &\approx A_1 \cos x_1 + A_2 \cos x_2 + A_3 \cos x_3 + A_4 \cos x_4 = \\ &= 2A_4 \cos x_4 + 2A_3 \cos x_3 = 1.380329. \end{aligned}$$

Точное значение интеграла $\sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}} = 1.3803885$.

Тема 3. Приближенное вычисление интегралов

Лекция 21. Вероятностный метод вычисления интегралов (2ч. УСР)

1. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло.
2. Графическая реализация метода Монте-Карло вычисления однократного интеграла.
3. Повышение точности метода Монте-Карло.
4. Погрешность метода Монте-Карло.

Цели: 1) ознакомиться с двумя простейшими вариантами метода Монте-Карло; 2) научиться применять изученный метод статистических испытаний при вычислении интегралов.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, тестовые задания.

Учебно-методическое обеспечение – [5]–[8] [11] [12] [15]–[20] [22] из списка литературы.

Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний). Для вычисления интегралов большой кратности при невысокой точности широко используется метод статистических испытаний, или метод Монте-Карло. Имеется много вариантов этого метода. Рассмотрим несколько простейших вариантов.

Представим себе прямоугольник высотой H и длиной $b - a$, такой, что функция $f(x)$ целиком лежит внутри данного прямоугольника (рисунок 3.1).

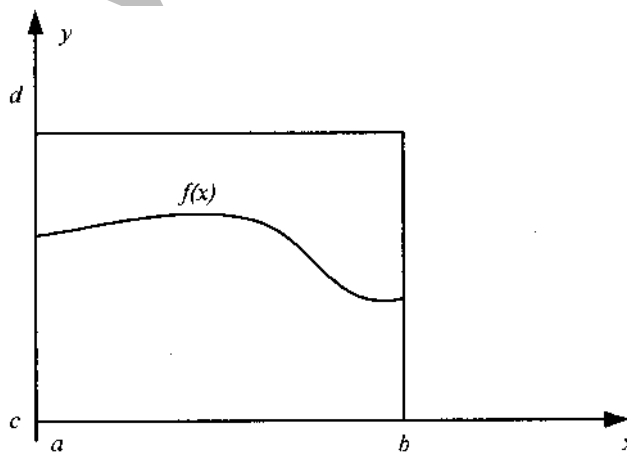


Рисунок 3.1 – К объяснению метода Монте-Карло

Сгенерируем N пар случайных чисел, равномерно распределенных в данном прямоугольнике

$$a \leq x_i \leq b, \quad 0 \leq y_i \leq H.$$

Тогда доля точек (x_i, y_i) , удовлетворяющих условию $y_i \leq f(x_i)$, является оценкой отношения интеграла от функции $f(x)$ к площади рассматриваемого

прямоугольника. Следовательно, оценка интеграла в данном методе может быть получена по формуле

$$F_N = A \frac{n_s}{N},$$

где n_s – число точек, удовлетворяющих условию $y_i \leq f(x_i)$, N – полное количество точек, A – площадь прямоугольника.

Можно предложить и другой путь вычисления определенного интеграла, рассматривая его как среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$F_N = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

где x_i – последовательность случайных чисел с равномерным законом распределения на отрезке $[a, b]$.

Погрешность метода Монте-Карло не зависит от размерности и меняется как $O(n^{-\frac{1}{2}})$. Следовательно, для достаточно больших d интегрирование по методу Монте-Карло будет приводить к меньшим погрешностям при тех же значениях N .

Пусть требуется вычислить m кратный интеграл

$$I = \iiint_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (3.61)$$

по области G , лежащей в m -мерном единичном кубе $0 \leq x_i \leq 1$, $i = \overline{1, m}$.

Первый способ. Выберем m равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ последовательностей случайных чисел

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \dots & x_n^{(1)}, & \dots \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \dots & x_n^{(2)}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & x_3^{(m)}, & \dots & x_n^{(m)}, & \dots \end{array}$$

Тогда точки

$$M_i(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots, x_i^{(m)}) \quad i = 1, 2, \dots$$

можно рассматривать как случайные, равномерно распределенные в m -мерном единичном кубе.

Пусть из общего числа N случайных точек n точек попали в область G , остальные $N-n$ оказались вне G . Тогда при достаточно большом N имеет место приближенная формула

$$I \approx \frac{V_G}{n} \sum_{i=1}^n f(M_i),$$

где под V_G понимается m -мерный объем области интегрирования. Если вычисление V_G затруднительно, то можно принять $V_G \approx \frac{n}{N}$, и для приближенного вычисления интеграла получим

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n f(M_i). \quad (3.62)$$

Указанный способ можно применить к вычислению кратных интегралов и для произвольной области G , если существует такая замена переменных, при которой новая область интегрирования будет заключена в m -мерном единичном кубе.

Второй способ. Если функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq 0$, то интеграл (3.61) можно рассматривать как объем тела в $(m+1)$ -мерном пространстве, т.е.

$$I = \iiint_V \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_m dy, \quad (3.63)$$

где область интегрирования V определяется условиями

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Если в области G

$$0 \leq f(x) \leq B, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}),$$

то введя новую переменную $\eta = \frac{1}{B} y$, получим

$$I = B \iiint_v \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_m d\eta,$$

где область v лежит в единичном $(m+1)$ -мерном кубе $0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, m}, 0 \leq \eta \leq 1$.

Возьмем $(m+1)$ равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$ случайных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \dots & x_n^{(1)}, & \dots \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \dots & x_n^{(2)}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & x_3^{(m)}, & \dots & x_n^{(m)}, & \dots \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \dots & \eta_n, & \dots \end{array}$$

Составим соответствующую последовательность случайных точек

$$M_i(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots, x_i^{(m)}, \eta_i) \quad i = 1, 2, \dots$$

Пусть из общего числа N случайных точек n точек принадлежат объему v , тогда имеет место приближенная формула

$$I \approx B \cdot \frac{n}{N}. \quad (3.64)$$

Погрешность формулы (3.64)

$$R = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Это означает, что для обеспечения большой точности число точек N должно быть велико. Но так как приближенные формулы (3.62), (3.64) не зависят от размерности интеграла, метод Монте-Карло оказывается выгодным

при вычислении интегралов большой размерности. Трудности применения метода Монте-Карло связаны с получением последовательностей случайных чисел. Для получения таких чисел можно использовать готовые таблицы случайных чисел (Таблицы математической статистики).

ВМИП УСР ЧМ ПМ

Тема 4. Численное решение интегральных уравнений

Лекция 25. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода (2ч. УСР)

1. Метод квадратур решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Сходимость метода квадратур.
2. Построение приближенного решения в виде непрерывной функции.
3. Способы построения квадратурных формул для решения уравнений Вольтерра второго рода.
4. Практический алгоритм построения приближенного решения с заданной точностью.

Цели: 1) ознакомиться с методом квадратур при решении интегральных уравнений Вольтерра второго рода; 2) научиться приближенно решать уравнения Вольтерра второго рода изученным методом.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, тестовые задания.

Учебно-методическое обеспечение – [5]–[8] [12] [14]–[17] [21] [22] из списка литературы.

Частный случай линейных уравнений вида (4.1), (4.2), имеющий важное самостоятельное значение, возникает для ядер, удовлетворяющих условию $K(x,t) \equiv 0 \ t > x$.

Такие ядра называют ядрами Вольтерра. При этом уравнения

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b] \quad (4.52)$$

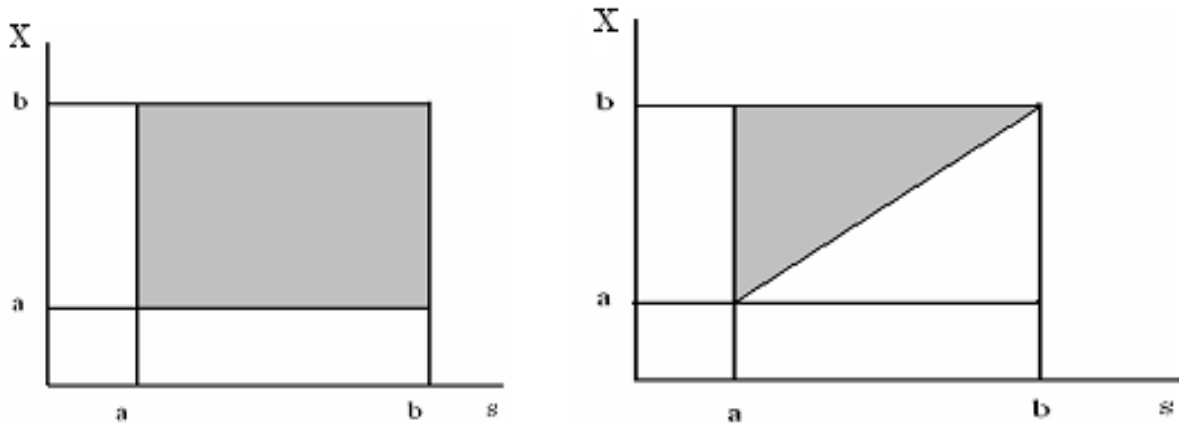
$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b] \quad (4.53)$$

называют уравнениями Вольтерра соответственно 1-го и 2-го рода.

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция, $K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения, $f(x)$ – свободный член (правая часть) интегрального уравнения. Однородное уравнение (при $f \equiv 0$) имеет только тривиальное решение, а условия существования решения неоднородного уравнения (4.53) связаны с различными ограничениями на ядро $K(x,s)$ и правую часть $f(x)$. В частности, решение существует и единственно в классе непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, если ядро непрерывно внутри и на сторонах треугольника, ограниченного прямыми $s = a$, $x = b$, $x = s$, а функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

К линейным уравнениям Вольтерра 2-го рода приводит, например, решение начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений.

На практике чаще применяются уравнения второго рода. Ядро интегрального уравнения Фредгольма определяется на множестве точек квадрата $[a,b] \times [a,b]$, а уравнения Вольтерра – в треугольнике $a \leq s \leq x \leq b$.



Надо заметить, что если доопределить ядро $K(x,s)$ уравнения Вольтерра нулем, то в треугольнике $a \leq s \leq x \leq b$ уравнение Вольтерра можно считать уравнением Фредгольма и использовать соответствующие методы решения.

Однако при этом надо понимать, что могут быть упущены некоторые специфические особенности первоначального уравнения Вольтерра, поэтому все же надо решать эти два типа уравнений отдельно.

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения $\Delta = \{x, s : a \leq s \leq x \leq b\}$ и не равно нулю тождественно, $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ аб функция.

Теорема 4.2. Уравнение Вольтерра 2-го рода при любом значении λ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений $y_{n+1} = \lambda B y_n + f$, $\forall y_0 \in C_{[a,b]}$, $f(x) \in C_{[a,b]}$.

Следствие 4.1. При любом λ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Метод последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода называется методом Пикара и выглядит так: для любого начального приближения $y_0 \in C_{[a,b]}$ определим $y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x,s) y_n(s) ds + f(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, или $y_{n+1} = \lambda B y_n + f$, причем $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x)$.

Метод квадратур. Особенно просто применение метода конечных сумм для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4.53), которое можно рассматривать как уравнение Фредгольма второго рода. Здесь $K_{ij} = 0$ при $j > i$, и, следовательно, соответствующая система (4.14) имеет вид

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^i A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.54)$$

Получилась линейная система с треугольной матрицей.

Здесь $y_i = \tilde{y}(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, \tilde{y} – приближение к искомой функции y . Решение системы уравнений (4.54) дает приближенные значения искомой функции в узлах x_i .

Если $1 - \lambda A_i K_{ii} \neq 0$, то из системы (4.54) последовательно находим

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(1 - \lambda A_1 K_{11})^{-1}, \\ y_2 &= (f_2 + \lambda A_1 K_{21} y_1)(1 - \lambda A_2 K_{22})^{-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= (f_n + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} A_j K_{nj} y_j)(1 - \lambda A_n K_{nn})^{-1}. \end{aligned}$$

или значения y_1, y_2, \dots, y_n можно последовательно найти по рекуррентной формуле

$$y_i = (1 - \lambda A_i K_{ii})^{-1} (f_i + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.55)$$

Выполнения условий $1 - \lambda A_i K_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ можно добиться путем выбора узлов квадратурной формулы и обеспечения достаточной малости коэффициентов A_i .

Отметим особенность выражения (4.55), состоящую в росте количества вычислений вместе с номером шага дискретизации из-за увеличения членов суммы, причем значения коэффициентов $A_j K_{ij}$ при y_j меняются для каждого i , что в общем случае не позволяет воспользоваться результатами вычислений на предыдущих шагах. Кроме того, имеются особенности в применении различных квадратурных формул. Например, применение формулы Симпсона должно чередоваться для нечетных узлов с каким-либо другим правилом, например, с формулой прямоугольников или формулой трапеций. Возникают сложности при применении формул Гаусса и Чебышева.

Достаточно простым и во многих случаях эффективным является применение формулы **трапеций**. Для равномерной сетки с шагом h имеем

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h.$$

Тогда формула (4.55) примет следующий вид

$$y_i = (1 - \lambda \frac{h}{2} K_{ii})^{-1} (f_i + \lambda \frac{h}{2} K_{ij} y_j + \lambda \sum_{j=2}^{i-1} K_{ij} y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Метод квадратур на основе квадратурной формулы Симпсона. В этом случае в формуле

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R \\ A_1 &= A_{2m+1} = \frac{h}{3}; \quad A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3}; \quad A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \\ x_i &= a + h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n-1}, \quad \text{где } n = 2m+1, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Пример. Найти решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int_0^x e^{-x-s} y(s) ds = \frac{e^{-x} + e^{-3x}}{2}.$$

Первый способ. Ищем решение в виде

$$y(x) \approx Y_4(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x),$$

где

$$\varphi_0(x) = f(x); \quad \varphi_k(x) = \int_0^x K(x, s) \varphi_{k-1}(s) ds.$$

В результате интегрирования получим:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-3x}),$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x e^{-x-s} \varphi_0(s) ds = \frac{1}{8} [3e^{-x} - 2e^{-3x} - e^{-5x}],$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x e^{-x-s} \varphi_1(s) ds = \frac{1}{48} [5e^{-x} - 9e^{-3x} + 3e^{-5x} + e^{-7x}],$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \int_0^x e^{-x-s} \varphi_2(s) ds = \\ &= \frac{1}{384} [7e^{-x} - 20e^{-3x} + 18e^{-5x} - 4e^{-7x} - e^{-9x}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(x) &= \int_0^x e^{-x-s} \varphi_3(s) ds = \\ &= \frac{1}{3840} [9e^{-x} - 35e^{-3x} + 50e^{-5x} - 30e^{-7x} + 5e^{-9x} + e^{-11x}], \end{aligned}$$

откуда

$$Y_4(x) = \frac{1}{3840} [3839e^{-x} + 5e^{-3x} - 10e^{-5x} + 10e^{-7x} - 5e^{-9x} + e^{-11x}].$$

Точное решение этого уравнения

$$y(x) = e^{-x}.$$

Для сравнения приведем значения точного решения и приближенного решения при $x=0$ и $x=1$. Имеем:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1,00000, & y(1) &= 0,36788, \\ Y_4(0) &= 1,00000, & Y_4(1) &= 0,36783. \end{aligned}$$

Второй способ. Будем вычислять значения решения в точках

$$x = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,$$

используя для замены интеграла в уравнении обобщенную формулу трапеций с шагом $h=0,2$. Таблица значений K_{ij} и f_k имеет вид:

x_i	$K_{0,1}$	K_{11}	K_{21}	K_{31}	K_{41}	K_{51}	f_i
0	1,00000	0,81873	0,67032	0,54881	0,44933	0,36788	1,00000
1	0,81873	0,67032	0,54881	0,44933	0,36788	0,30119	0,68377
2	0,67032	0,54881	0,44933	0,36788	0,30119	0,24660	0,48576
3	0,54881	0,44933	0,36788	0,30119	0,24660	0,20190	0,35706
4	0,44933	0,36788	0,30119	0,24660	0,20190	0,16530	0,27002
5	0,36788	0,30119	0,24660	0,20190	0,16530	0,13534	0,20883

Вычисления дают следующий результат:

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= f_0 = 1,0000, \\
 Y_1 &= \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{11}} \left[f_1 + \frac{h}{2} K_{10} Y_0 \right] = 0,8206, \\
 Y_2 &= \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{22}} \left[f_2 + \frac{h}{2} K_{20} Y_0 + h K_{21} Y_1 \right] = 0,6731, \\
 Y_3 &= \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{33}} \left[f_3 + \frac{h}{2} K_{30} Y_0 + h (K_{31} Y_1 + K_{32} Y_2) \right] = 0,5518, \\
 Y_4 &= \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{44}} \left[f_4 + \frac{h}{2} K_{40} Y_0 + h (K_{41} Y_1 + K_{42} Y_2 + K_{43} Y_3) \right] = 0,4522, \\
 Y_5 &= \frac{1}{1 - \frac{h}{2} K_{55}} \times \\
 &\quad \times \left[f_5 + \frac{h}{2} K_{50} Y_0 + h (K_{51} Y_1 + K_{52} Y_2 + K_{53} Y_3 + K_{54} Y_4) \right] = 0,3705.
 \end{aligned}$$

Ниже приведена таблица значений точного решения и погрешность полученного приближенного решения:

x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Y_k	1,0000	0,8206	0,6731	0,5518	0,4522	0,3705
$y(x_k)$	1,0000	0,8187	0,6703	0,5488	0,4493	0,3679
$Y_k - y(x_k)$	0,0000	0,0019	0,0028	0,0030	0,0029	0,0026

Тема 6. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Лекция 29. Общие понятия в теории конечно-разностных методов (2ч. УСР)

1. Постановка задачи. Основные определения и примеры краевых задач. Понятие о линейной краевой задаче.
2. Двухточечная краевая задача.
3. Обзор методов приближенного решения краевых задач.

Цели: 1) ознакомиться с постановкой задачи теории конечно-разностных методов, основными определениями, видами и примерами краевых задач; 2) ознакомиться с методами приближенного решения краевых задач; 3) научиться оперировать изученными теоретическими аспектами при практической работе.

Форма выполнения заданий – индивидуальная.

Формы контроля теоретических знаний и практических навыков – групповая консультация, тестовые задания.

Учебно-методическое обеспечение – [5]–[9] [12] [14] [16] [19] [21] [22] из списка литературы.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n -го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (6.1)$$

Краевая задача для уравнения (6.1) заключается в следующем: найти решение $y = y(x)$ уравнения (6.1), для которого значения его производных $y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i)$ ($s = 0, 1, 2, \dots, \alpha_i$) в заданной системе точек $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$, $k \geq 2$) удовлетворяют n независимым между собой **краевым условиям**, в общем случае, нелинейным

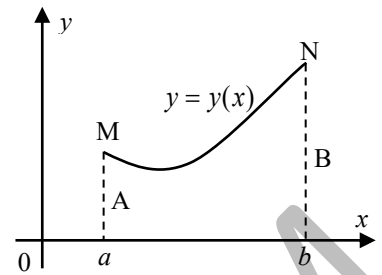
$$V_m(y_1, y_1', \dots, y_1^{(\alpha_{1m})}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(\alpha_{km})}) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (6.2)$$

Так как в силу (6.1) производные $y^{(s)}$ порядка n и выше могут быть в общем случае выражены через искомую функцию y и ее младшие производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то можно считать что $\alpha_{im} \leq n-1$.

Краевая задача (6.1) – (6.2) часто встречается в приложениях. Приведем примеры конкретных краевых задач.

Пример 6.1. Простейшая двухточечная краевая задача состоит в нахождении функции $y = y(x)$ удовлетворяющей дифференциальному уравнению второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ и принимающую при $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) заданные значения $y(a) = A$, $y(b) = B$.

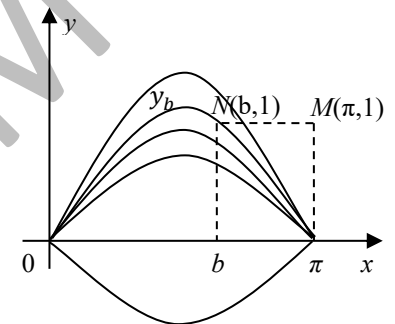
Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую этого дифференциального уравнения, проходящую через заданные точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$.



Общая краевая задача (6.1) – (6.2) может:

- а) не иметь решений;
- б) иметь единственное решение;
- в) иметь более одного решения.

Пример 6.2. Краевая задача $y'' + y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ имеет бесконечное множество решений вида $y = c \sin x$, где c – любая константа. Краевая задача $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(b) = 1$ при $0 < b < \pi$ имеет единственное решение $y_b = \frac{\sin x}{\sin b}$, а при $b = \pi$ совсем не имеет решений.



Аналогично ставятся краевые задачи для систем дифференциальных уравнений.

Будем предполагать, что решение краевой задачи существует и оно единственно. Наша цель будет заключаться в нахождении этого решения.

Линейная краевая задача. Если дифференциальное уравнение и краевые условия линейны, то такая краевая задача называется **линейной краевой задачей**.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение **второго порядка**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (6.3)$$

где $p(x), q(x), f(x)$ — известные непрерывные на $[a, b]$ функции, с **краевыми условиями**:

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases}, \quad (6.4)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ — заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Эта задача является **двухточечной** (т.к. в краевые условия входят две абсциссы $x_1 = a$, $x_2 = b$ ($a < b$) — концы отрезка $[a, b]$).

Линейная краевая задача состоит в нахождении функции $y = y(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6.3) и линейно независимым краевым условиям (6.4). Линейная краевая задача называется **однородной**, если $f(x) \equiv 0$ для $a \leq x \leq b$ и $A = B = 0$; в противном случае краевая задача (6.3) – (6.4) называется **неоднородной**.

Однородная краевая задача (6.1) – (6.4) всегда имеет **тривиальное решение** $y(x) \equiv 0$. Однако во многих случаях представляют интерес **нетривиальные решения** этой задачи, которые существуют не всегда. Поэтому в дифференциальное уравнение (6.3) или в краевые условия (6.4) вводят параметр λ , варьируя который можно добиться, чтобы при некоторых его значениях соответствующая краевая задача имела нетривиальные решения. Эти исключительные значения параметра λ называются **собственными значениями (характеристическими числами)**, а отвечающие им нетривиальные решения – **собственными функциями** задачи. Таким образом, приходим к задаче **о собственных значениях** (важнейшая задача математического анализа).

Точное решение краевой задачи возможно лишь в редких случаях. Поэтому рассмотрим приближенные методы решения краевых задач.

Методы приближенного решения поставленных краевых задач можно разбить на две группы: **разностные** методы (например, МКР) и **аналитические** методы (например, метод Галеркина, метод коллокации, метод наименьших квадратов).

Литература

1. Березовская, Е. М. Численные методы математической физики : разностные схемы и параболические уравнения : практическое пособие / Е. М. Березовская, М. И. Жадан. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – 47 с. – Режим доступа : <http://elib.gsu.by/jspui/handle/123456789/15002> .
2. Березовская, Е. М. Численные методы математической физики : эллиптические и гиперболические уравнения : практическое пособие / Е. М. Березовская, М. И. Жадан. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – 47 с. – Режим доступа : <http://elib.gsu.by/jspui/handle/123456789/15004>.
3. Воробьева, В. Е. Основы численных методов и их реализация в MS Excel : учебное пособие / В. Е. Воробьева, Ф. И. Воробьева. – Казань : КНИТУ, 2022. – 124 с. – Режим доступа : по подписке : <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=702265> .
4. Коновалова, Е. И. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Е. И. Коновалова, Л. В. Яблокова. – Самара : Самарский университет, 2022. – 152 с. – Режим доступа : для авториз. пользователей : <https://e.lanbook.com/book/336686>.
5. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – Москва : Лаборатория знаний, 2015. – 243 с.
6. Бахвалов, Н. С. Численные методы. Решения задач и упражнения: учебное пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков. – Москва : Лаборатория знаний, 2016. – 355 с.
7. Бахвалов, Н.С. Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва : Бинوم. Лаборатория знаний, 2023. – 636 с.
8. Березин, И. С. Методы вычислений: учебное пособие: в 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – Москва : Наука, 1966.
9. Березовская, Е. М. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: тексты лекций: в 3 ч. / Е. М. Березовская, М. И. Жадан. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – Ч. 3. – 55 с.
10. Березовская, Е. М. Методы вычислений : тексты лекций : в 2 ч. / Е. М. Березовская, М. И. Жадан. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2010. – Ч. 1 : Интерполирование и нелинейные уравнения. – 80 с. – Режим доступа: <http://elib.gsu.by/handle/123456789/1589> .
11. Березовская, Е. М. Методы численного анализа: тексты лекций: в 2 ч. / Е. М. Березовская. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – Ч. 1 : Интерполяция и интегрирование. – 131 с. – Режим доступа: <http://elib.gsu.by/handle/123456789/3523> .
12. Вабищевич, П. Н. Численные методы: Вычислительный практикум. Практическое применение численных методов при использовании алгоритмического языка Python / П. Н. Вабищевич. – Москва : Ленанд, 2019. – 320 с.

13. Вержбицкий, В. М. Численные методы: линейная алгебра и нелинейные уравнения: учебное пособие / В. М. Вержбицкий. – Москва : Оникс 21 век, 2005. – 432 с.
14. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 400 с.
15. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – Москва : Лань, 2015. – 448 с.
16. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В. Д. Колдаев. – Москва: Форум, 2018. – 336 с.
17. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие / В. Н. Копченова, И. А. Марон. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2008. – 368 с.
18. Крылов, В. И. Вычислительные методы: учебное пособие: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – Москва : Наука, 1976. – 1977.

Электронные ресурсы

19. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2026. – Режим доступа: https://scask.ru/i_book_clm.php?id=1.
20. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2026. – Т.1. – Режим доступа: https://scask.ru/i_book_calc1.php?id=1.
21. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2026. – Т.2. – Режим доступа: https://scask.ru/i_book_calc2.php?id=1.
22. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин // Научная библиотека [Электронный ресурс]. – 2026. – Режим доступа: https://scask.ru/q_book_dig_m.php?id=1.